Centre africain de recherche
scientifique et de Formation

Tel: (226) 25 37 46 55 / 70 80 64 52
Email: cres.courriel@gmail.com
Site web: cres-edu.org

Principes et Méthodes de la simulation Numérique sur ordinateur

M. BADOLO
www.cres-edu.org

Sommaire

Présentations de la leçon

- **Objectif général**
- **Objectifs spécifiques**
- **Contenu de la leçon**

Activités d'apprentissage

- **Principes de base de la simulation numérique sur ordinateur**
- **Champs d'applications et avantages économiques et scientifiques de la simulation numérique**
- **Outils et méthodes de la simulation numérique sur ordinateur**

Présentation de la leçon

Objectif général

L'objectif général de cette leçon est de décrire les principes de base, les outils et méthodes de la simulation numérique sur ordinateur.

Objectifs spécifiques

A la fin de la leçon, l'apprenant doit être capable de :

- définir l'investigation numérique sur ordinateur ;
- décrire le processus d'élaboration d'un modèle mathématique ;
- décrire le processus de mise en œuvre sur ordinateur d'un modèle mathématique ;
- énumérer quelques champs d'applications de la simulation numérique ;
- décrire les principaux avantages économiques et scientifiques de la simulation numérique ;

Contenu de la leçon

La leçon est structurée en trois sections qui sont :

- Principes de base de la simulation numérique sur ordinateur ;
- Outils et méthodes de la simulation numérique sur ordinateur ;
- Champs d'applications et avantages économiques et scientifiques de la simulation numérique ;

Activités d'apprentissage

I. Principes de base

1. L'investigation expérimentable

Traditionnellement, pour étudier un phénomène ou un processus donné dans les domaines des sciences et techniques, on procède à des observations ou à des mesures. Ce mode d'investigation est l'investigation expérimentale. Sa mise en œuvre nécessite de mettre en place un dispositif de mesure ou d'observation. La complexité d'un tel dispositif dépend du phénomène ou du processus considéré. La figure (I) illustre la démarche de production des connaissances par l'investigation expérimentale.

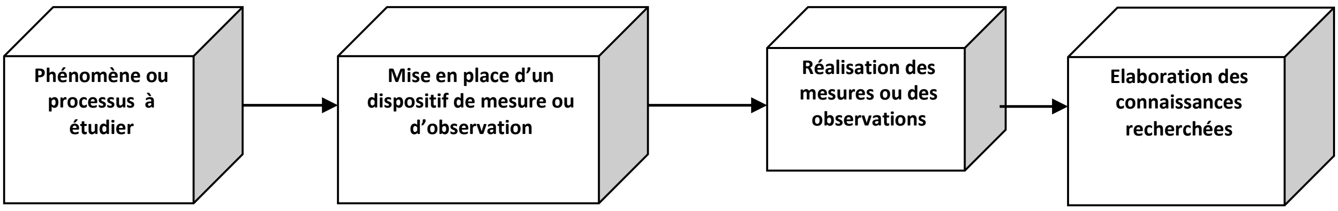

Figure (I) : illustration schématique de l'approche expérimentale

Dans le domaine des sciences et techniques, l'investigation expérimentale est reconnue comme le mode ultime de production des connaissances. Cependant, sa mise en œuvre peut se heurter à divers obstacles:

- le coût du dispositif de mesure ou d'observation ;
- des dangers liés aux mesures ou observations à réaliser ;
- les appareils de mesure ou d'observation ne sont pas disponibles ;

2. Principes de base de la simulation numérique sur ordinateur

Les progrès technologiques réalisés par l'industrie de l'informatique et les constants progrès de l'analyse numérique ont permis l'émergence et le développement, à côté de l'investigation expérimentale, d'un autre mode d'investigation dans les domaines des sciences et techniques, la simulation numérique sur ordinateur. On conduit une étude par simulation numérique sur ordinateur en suivant la démarche illustrée par la figure (II).

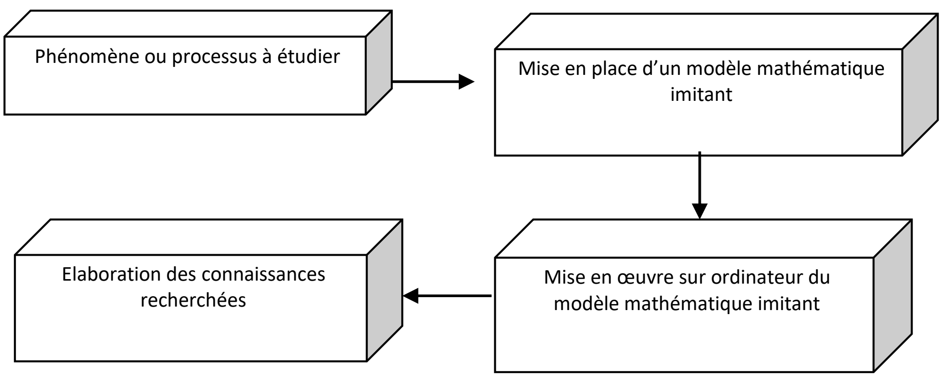

Figure (II) : illustration schématique de l'investigation numérique

Fondamentalement, la simulation numérique consiste à :

- imiter par un modèle mathématique le phénomène ou le processus considéré ;
- mettre en œuvre sur ordinateur le modèle imitant pour produire des informations qui vont concourir à l'élaboration des connaissances recherchées

2.1. La modélisation mathématique

L'exercice de construction de modèles mathématiques est la modélisation mathématique. Du fait de la très grande difficulté à transposer de manière parfaite un phénomène ou un processus donné dans le monde mathématique, la modélisation procède généralement par simplification ou idéalisation : on retient certains des aspects du phénomène ou du processus à modéliser et on abandonne certains autres, selon l'usage pressenti du modèle en construction. Ainsi un modèle mathématique est généralement une imitation approximative du phénomène ou du processus auquel il se rapporte.
Dans les domaines des sciences et techniques, il n'existe pas de recettes pour produire de manière systématique des modèles mathématiques. Chaque construction de modèle mathématique est une réalisation particulière, qui requiert de l'imagination et une profonde compréhension du phénomène ou du processus à modéliser.
En pratique, pour construire un modèle mathématique, on pourrait procéder par les quatre étapes suivantes :

Définition du problème : on définit et on délimite clairement le phénomène ou le processus dont on désire élaborer un modèle mathématique. On spécifie ensuite l'ensemble des informations à obtenir par la mise en oeuvre du modèle à construire.

Définition des variables dépendantes et indépendantes : les modèles mathématiques sont de nature et de complexité diverses. Ils ont cependant un trait commun : ils ne reproduisent que les aspects quantitatifs ou mesurables des phénomènes ou des processus qu'ils miment. Ce sont les variables dépendantes du modèle mathématique, qui peut également contenir d'autres variables, les variables indépendantes ou explicatives.
Pour construire un modèle mathématique, on définit l'ensemble de ses variables dépendantes et indépendantes, en relation avec les informations à générer.

Écriture d'un modèle candidat : une fois les variables dépendantes et indépendantes définies, on écrit les relations quantitatives qui lient entre elles ces variables, pour former un modèle mathématique « candidat », qui est à valider. Ces relations dépendent intimement des lois qui régissent le phénomène ou le processus considéré. Elles n'ont donc pas de caractère universel.

Validation du modèle candidat : avant d'utiliser un modèle qui vient d'être élaboré pour générer des informations nouvelles, il faut au préalable le valider, c'est-à-dire s'assurer que ce modèle imite de manière satisfaisante le phénomène considéré. Une procédure de validation d'un modèle mathématique très utilisée consiste à mettre en œuvre le modèle candidat pour reproduire des informations « test ». Si ces informations « test » sont

reproduites à la précision souhaitée, alors le modèle candidat est définitivement retenu. Dans le cas contraire, on reprend le processus de modélisation avec beaucoup plus de rigueur.
La figure (III) illustre le processus de construction d'un modèle mathématique décrit ci - dessus.

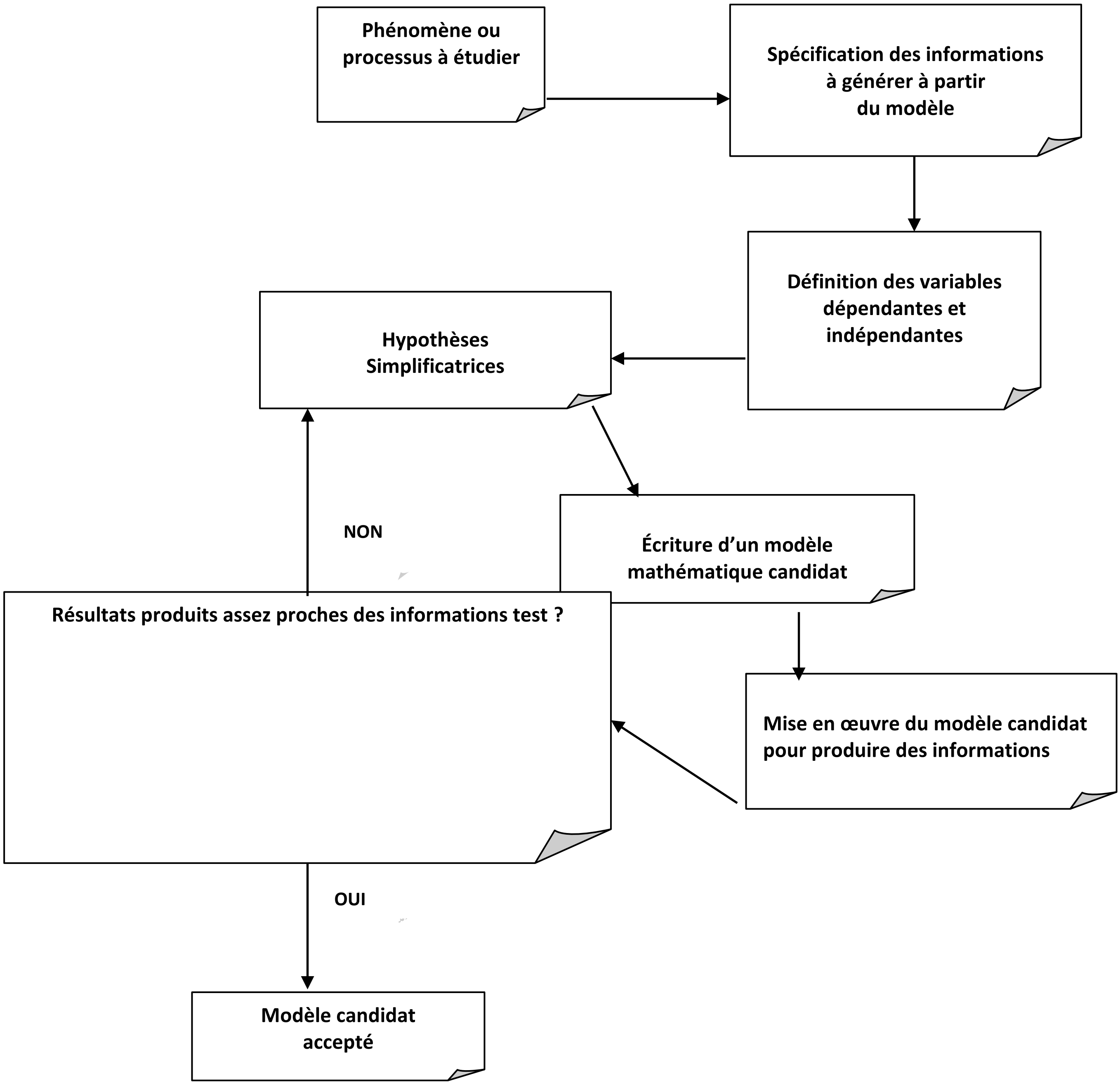

Figure (III) : Illustration du processus de construction d'un modèle mathématique

Exemples de modèles mathématiques : la modélisation d'un phénomène ou d'un processus donné peut aboutir à :

- ✓ un système (S) d'équations algébriques linéaires d'ordre n de la forme :

AX = B, où

A est une matrice carrée d'ordre n de coefficients a_{ij} (i, j = 1, …, n)
B est une matrice colonne à n composantes b_i (i = 1, …, n)
X est une matrice colonne à n composantes x_i (i = 1, …, n), inconnues.

Le système (S) peut être écrit explicitement sous la forme d'un système de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & . & . & . & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & . & . & . & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & . & . & . & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}. \; ; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \; ; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

- ✓ une équation différentielle du premier

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

sur un intervalle $[t_0, b]$, équation à laquelle est associée la condition initiale y (t_0) = y_0 .

- ✓ une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

sur un intervalle $]0, L[$, $\nabla t \succ 0$ à laquelle on adjoint des conditions aux limites et une condition initiale spécifiques.

En pratique, l'élaboration d'un modèle mathématique peut se réduire au choix d'un modèle mathématique si l'on arrive à associer au phénomène ou processus étudié un analogue scientifique dont la description théorique est connue.

2.2. La mise en œuvre sur ordinateur de modèles mathématiques

L'exercice de modélisation aboutit généralement à une équation (ou inéquation) ou à un système d'équations (ou inéquations) dont les théories mathématiques permettent rarement d'établir la solution exacte. On recherche alors une solution approchée du modèle élaboré en utilisant l'ordinateur.
Le calcul sur ordinateur d'une solution approchée équation est un processus qui comprend plusieurs étapes, comme l'illustré la figure (IV) :

- la conception d'un schéma de calcul ;
- la transcription du schéma de calcul dans un lange de programmation informatique ;
- la mise en œuvre (exécution) du programme informatique sur ordinateur

.

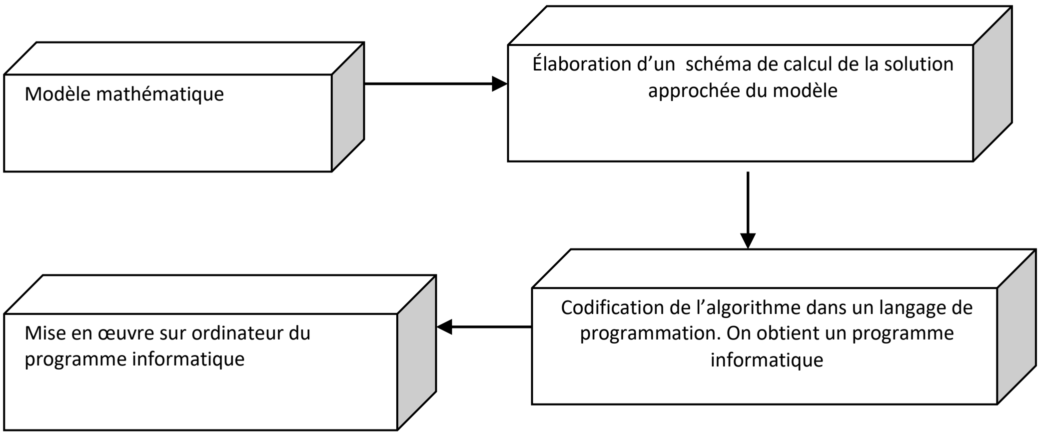

Figure (IV) : illustration de la conduite d'une session de calcul sur ordinateur

II. Outils et méthodes de la simulation numérique sur ordinateur

La pratique de la simulation numérique requiert des connaissances solides dans trois disciplines qui sont :

- l'analyse numérique (les méthodes de calcul)
- l'algorithmique (conception de schéma de calcul)
- la programmation informatique (codification des algorithmes dans un langage de programmataion)

III. Champs d'applications et avantages économiques et scientifiques de la simulation numérique

La simulation numérique est aujourd'hui largement utilisée comme mode d'investigation dans tous les domaines des sciences et techniques. Les résultats contenus dans de nombreuses thèses de doctorat et d'articles de revues scientifiques proviennent de simulations numériques sur ordinateur.
Un champ majeur d'application de la simulation numérique est la production de connaissances en lien avec l'évolution future d'un phénomène ou d'un processus donné.

Aujourd'hui, un des domaines majeurs d'application de la simulation numérique est l'étude des changements climatiques et de leurs effets sur les systèmes naturels et humains. Cette application recouvre la production de scénarios de changements climatiques et l'évaluation des impacts des changements climatiques sur les différents secteurs socio-économiques.

La simulation numérique sur ordinateur présente des avantages spécifiques qui expliquent son utilisation répandue dans les laboratoires de recherche comme mode d'investigation :

- la baisse constante du coût des ordinateurs ;
- la possibilité de reprendre une même expérience plusieurs fois à des coûts relativement modestes ;
- la souplesse de l'approche numérique. Pour changer les conditions dans lesquelles se fait une étude par la voie numérique, il suffit de changer les valeurs de certains paramètres. Une telle manœuvre peut se révéler par contre très longue et coûteuse dans le cas d'une étude expérimentale.
- les progrès réalisés par l'analyse numérique qui permet de conduire des calculs volumineux et complexes dans des temps raisonnables avec une précision satisfaisante.